

Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas
Maestría en Tecnología Avanzada
Guía de Estudio del Propedéutico de Matemáticas

Octubre de 2022

Temario General

1. El conjunto de los números reales
2. Funciones, sucesiones y límites
3. Continuidad y diferenciabilidad

Referencias bibliográficas

- Spivak, M. (1984). Calculus Vol. I, II. Editorial Reverté, Barcelona.
- Apostol, T. (1992). Calculus Vol I Editorial Reverté, México.
- Spivak, M. (1996) Cálculo Infinitesimal, 2a edn. Editorial Reverté, México.
- Courant, R.; John, F. (1999) Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático Vol. 1, Limusa Noriega, México.
- Ilín, V.; Pozniak, E. (1982) Fundamentos del Análisis Matemático Vol. 1, Editorial MIR, Moscú.

Ejemplos de problemas de examen

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $a < b$, $a^n < b^n$
2. Demostrar que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional.
3. ¿Existe alguna forma de definir la función $\frac{|x|}{x}$ en $x = 0$ de tal forma que esta función sea continua en 0?
4. Hallar un entero n tal que f tenga una raíz entre n y $n + 1$ para
 - $f(x) = x^3 - x + 3$
 - $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

5. Probar que existe un número x tal que

$$\sin x = x - 1$$

6. Demostrar lo siguiente:

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

7. Demostrar que

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{db}, \quad b, d \neq 0$$

8. Encontrar todos los números x tales que

$$4 - x < 3 - 2x$$

9. Encontrar todos los números x tales que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$$

10. Encontrar todos los números x tales que

$$|x-1| + |x-2| > 1$$

11. Demostrar por inducción que para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

12. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < x_0 < b$. Supongamos que existe

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Probar entonces que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$$

13. Demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0}$$

existe si y solamente si $m \geq n$. ¿Cuál es el límite cuando $m = n$? ¿Y cuando $m > n$?

14. Hallar un δ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para todo x que satisface $0 < |x - a| < \delta$.

$$f(x) = \frac{x}{1 + \sin^2 x}, \quad a = 0, l = 0$$

15. Hallar un δ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para todo x que satisface $0 < |x - a| < \delta$.

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 1, l = 1$$

16. Dar un ejemplo de una función f que no sea continua en ningún punto pero que $|f|$ sea continua en todos los puntos.

17. Sea $f(x)$ una función tal que $|f(x)| \leq x^2$ para todo x . Probar que f es diferenciable en cero.

18. Calcule la siguiente derivada

$$f(x) = \sin\left(\frac{x^3}{\cos(x^3)}\right)$$

19. Hallar $f'(x)$ en función de $g'(x)$ si:

- a) $f(x) = g(x \cdot g(a))$
- b) $f(x) = g(x)(x - a)$
- c) $f(x + 3) = g(x^2)$

20. Calcule la siguiente derivada

$$f(x) = \sin(x) + \sin(x^2)$$